

H5: onderzoek van functies

Algemene eigenschappen

- **Symmetrie van een functie:** even is een symmetrie rond de y-as of f is symmetrisch rond het middelpunt dan is f oneven.
- **Coördinatie-transformatie:**

$$x = \alpha u + a$$

$$y = \beta v + b$$

Asymptotisch gedrag van een functie

- **Horizontale asymptoot:** een asymptoot evenwijdig met de x-as:
- **Verticale asymptoot:** een asymptoot evenwijdig met de y-as:
(kan ook links of rechts van b)
- **Schuine asymptoot:** de rechte $ax + b = y$ is een schuine asymptoot

en

Gebruik van de eerste afgeleide

- **Lokale extrema:** x_0 is een lokaal maximum van een lokaal minimum.
- **Lokaal maximum:** x_0 is een lokaal maximum van f als er een $r > 0$ bestaat zodat $f(x) \leq f(x_0)$ voor elke $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$
- **Lokaal minimum:** x_0 is een lokaal minimum van f als er een $r > 0$ bestaat zodat $f(x_0) \leq f(x)$ voor elke $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$
- (B) Als f afleidbaar is in x_0 en x_0 is een extrema van f, dan geldt $f'(x_0) = 0$
- **Stationaire punten:** punten waarbij $f'(x) = 0$; dus voor alle extrema en voor alle punten die een horizontale buigpunten.
- (B) Stel dat f continu is in $]x_0 - r, x_0 + r[$ en afleidbaar is in $]x_0 - r, x_0[\cup]x_0, x_0 + r[$. Als $f'(x) \geq 0$ voor elke $x \in]x_0 - r, x_0[$ en $f'(x) \leq 0$ voor elke $x \in]x_0, x_0 + r[$ dan is x_0 een maximum van f. (omgekeerd voor een minimum)
- **Vergelijking van de raaklijn:** aan de grafiek van f in het punt $(x_0, f(x_0))$: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Gebruik van de tweede afgeleide

- Functie f is **convex** in het interval I: + meetkundige betekenis (holle kant naar boven)
- Functie f is **concaaf** in het interval I + meetkundige betekenis (holle kant naar onder)
- Als f convex (concaaf) is in een interval I, dan ligt de raaklijn (zo die bestaat) in elk punt van de grafiek onder (boven) de grafiek.

- Als f convex (concaaf) is in een interval I , dan is een lokaal minimum (maximum) van f het globaal minimum (maximum) van f in I .
- Stel dat f afleidbaar is in een interval I :
 - Als f' monotoon stijgend (dalend) is in I , dan is f convex (concaaf) in I .
 - Als f'' bestaat in I , en $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) dan is f convex (concaaf) in I .
- Stel dat f convex (concaaf) is in $[a, b]$:
 - f is continu in $]a, b[$
 - f is links afleidbaar in $]a, b[$ en de linkerafgeleide is er monotoon stijgend (dalend)
 - f is rechter afleidbaar en de afgeleide is er monotoon stijgend (dalend)
- (B) Stel dat f'' continu is in x_0 en $f'(x_0) = 0$, Als $f''(x_0) < 0$ (> 0) dan is x_0 een (lokaal) maximum (minimum) van f .
- **Buigraakpunten** van grafiek f : x_0 is een buigpunt van f als f afleidbaar is in I en $x_0 \in I$ een extremum is van f' , de raaklijn hieraan wordt de **buigraaklijn** genoemd.

Enkele voorbeelden

- **Progressief stijgen**: de 2^e afgeleide is positief
- **Degressief stijgen**: de 2^e afgeleide is negatief
- **Proportioneel stijgen**: de 2^e afgeleide is een functie van 0
- **Normale verdeling** met de **klokkromme** van Gauss

Verband tussen totale, gemiddelde en marginale waarden

Aannemen dat $x > 0$ en $f(x) > 0$ – economisch relevant zijn

- **Gemiddelde functie**: $f(x) = f(x)/x$ (streepje)
- **Marginale functie**: $f'(x)$
- **Elasticiteit** marginale functie/gemiddelde functie

In een extremum van de gemiddelde functie, snijden de grafieken van de gemiddelde functie en de marginale functie elkaar. De elasticiteit van f is gelijk aan 1 in zo'n punten.

Voor een extremum van de gemiddelde functie

Als in x de grafiek van de marginale functie boven (onder) de grafiek van de gemiddelde ligt, dan is f in x elastisch (onelastisch).

Toepassingen in de economie

- **Vrije concurrentie**: de marktprijs van een goed is een vast gegeven (bepaald door externe factoren), de vraag is bij welke afzet deze dan optimaal is.
 - de prijs is gelijk aan de marginale kosten
 - $W''(q_0)$ moet dubbel afleidbaar zijn: $W''(q_0) < 0$: $W''(q) = -K''(q)$ waardoor $K''(q) > 0$, of de marginale kosten moeten stijgend zijn (opdat q een maximum is).

- **Opbrengstfunctie:** $R(q) = p_0 \cdot q$
- **Winst:** $W(q) = R(q) - K(q)$ en $p_0 = K'(q_0)$
- **Monopolie van de aanbieder:** de prijs wordt niet door externe factoren bepaald, maar is afhankelijk van de vraag.
 - Marginale opbrengst is gelijk aan de marginale kost
 - Amoroso Robinson:
- **Voorraadbeheer**

H6 Integraalrekening

De bepaalde integraal

- **Verdeling:** een verdeling van P in het interval $[a,b]$ is een verzameling van punten $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ met $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
- **Verfijning:** P' is een verfijning van P P is een deelverzameling van P'
- **Ondersom:**
- **Bovensom:**
- **Onderintegraal:** het supremum van de verzameling der ondersommen $\{Op(f) | P \text{ is een verdeling van } [a,b]\}$:
- **Bovenintegraal:** het infimum van de verzameling van bovensommen:
- f , begreepd over $[a,b]$, is **integreerbaar** in $[a,b]$ als de onder en bovenintegraal van f over $[a,b]$ gelijk zijn = (bepaalde) integraal over $[a,b]$ = **Riemann integraal**
- (B) Als f continu is in $[a,b]$, dan is f integreerbaar over $[a,b]$
- Neem aan dat f continu is in $[a,b]$:
 - Als C een constante is, is ook Cf continu in $[a,b]$:
 - Als g continu is in $[a,b]$, dan is ook $f + g$ continu in $[a,b]$:

- Als $c \in]a,b[$:
- Als f continu is in $[a,b]$ en $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$ dan is:
- Gevolg (3): Als f en g continu zijn in $[a,b]$ en $f \geq g$, dan is:
- Gevolg (4): als f continu is in $[a,b]$:
- (B) **middelwaardestelling** over de integralen: als f continu is in $[a,b]$, dan bestaat er minstens 1 x_0 waarvoor er geldt dat:
- (B) **veralgemeende middelwaardestelling** voor integralen: Als f continu is in $[a,b]$ en g is een positieve functie in $[a,b]$, met g en $f \cdot g$ integreerbaar over $[a,b]$, dan bestaat er een $x_0 \in]a,b[$:

De onbepaalde integraal

- **Primitieve functie:** een functie F in $[a,b]$ is een primitieve functie van f in $[a,b]$ als F afleidbaar is in $[a,b]$ en $F'(x) = f(x)$ voor elke $x \in [a,b]$ (in de randpunten is het voldoende dat de rechter afgeleide van F gelijk is aan a en de linker afgeleide van F gelijk is aan b . (bewijs gebruik MWS)
 - F primitief van f in $[a,b]$ en C een constante, dan is $F + C$ ook een primitieve functie van f .
 - F_1 en F_2 zijn 2 primitieve functies van f in $[a,b]$, dan is $F_1 - F_2$ een constante functie in $[a,b]$
-
- **Onbepaalde primitieve functie:**
- (B) Grondstelling voor integralen: als f continu is in $[a,b]$ en F is een primitieve functie van f :

Integratiemethoden

- (B) Als f een continue functie is in $[a,b]$, en g een functie die $[a,b]$ afbeeldt in $[a,b]$, waarbij g afleidbaar is in $[a,b]$ en g' continu in $[a,b]$:
- (B) partiële integratie: als f en g afleidbare functies zijn in $[a,b]$ met f' en g' continu in $[a,b]$:

Integratie van rationale functies

- **Partieel breuken:** een rationale niet vereenvoudigbare breuk $p(x)/q(x)$ kan geschreven worden als:

Oneigenlijke integraal

- **Een integraal is oneigenlijk** als het integrandum $f(x)$ discontinu is in een punt van $[a,b]$ of als 1 van de grenzen oneindig is.
- Als f continu is in $[a,[:$
 Als f continu is in $]a,b]$:

- **Convergeren:** Als deze limiet bestaat en eindig is
- **Divergeren:** Als deze limiet bestaat en oneindig is

Als f continu is in $] -, +[$:

- Stel dat f continu is in $[a, b]$, maar niet in b . Dan is f continu in elk gesloten interval $[a, b-h]$ met $h > 0$:
Stel dat f continu is in $]a, b]$, maar niet in a . dan is f continu in elk gesloten interval $[a+h, b]$ met $h > 0$:

Toepassing in de economie

- **Consumentensurplus:** alle mensen die bereid waren een prijs $p > p_0$ te betalen. (besparingen)
- **Productensurplus:** alle producten die bereid waren tegen een lagere prijs te verkopen, hebben extra winst:
- **Jaarlijks kapitaliseren:** $K_1 = K_0 \cdot (1 + i)^n$
- **Maandelijks kapitaliseren:** $K_1 = K_0 \cdot (1 + i/m)^m = 1 + i_m$ (met i_m de conforme/effectieve rentevoet)
Maandelijks kapitaliseren na n jaar: $K_1 = K_0 \cdot (1 + i/m)^{mn}$
- **Continu kapitaliseren:** $K_t = K_0 e^{it}$ met conforme rentevoet e^i
- **Exponentiële wet:** als K_0 een startkapitaal voorstelt, $i(t)$ is de interestvoet en er wordt continu gekapitaliseerd, dan is het kapitaal na t_0 jaar gelijk aan:
- **Exponentiële groei:** $f(t) = A e^{t\lambda}$ (evenredige groei)
- **Logistische groei:** ($1/A = b$; $Mk = c$, $k = \lambda/M$)

Hoofdstuk 7: Reeksen

Getallenreeks

- **Oneindige reeks:** oneindige som van getallen:
- **Partiële som s_n :** de som van de eerste $n+1$ termen van de rij u : $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n =$
 - **Reekssom convergeert:**
 - **Reekssom divergeert:**
 - **Reekssom is onbestaand:**
- **Meetkundige reeks:** een reeks waarvan de termen u_n de gedaante $u_n = aq^n$ met a maakt niet uit: $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n =$ (met q niet gelijk aan 1)
 - Voor $q = -1$: de reekssom is onbestaande
 - Voor $q \in]-1, 1[$: de reeks is convergent $= 1/(1-q)$
 - Voor $q \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$: de reeks is divergent

- (B) Als de reeks convergeert, dan convergeert de rij der termen u_n naar 0:
- (gevolg 1): als de rij der termen u_n , niet naar 0 convergeert dan is de reeks niet convergent.
(omgekeerd niet geldig)

Reeks met positieve termen

- Gegeven is een reeks met positieve termen. Deze reeks convergeert als de rij der partiële sommen naar boven begrensd is.
- Zij een reeks met positieve termen is:
 - **Convergente majorante:** Als er een convergente reeks met positieve termen bestaat zodat $u_n \leq v_n$ voor elke $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), dan is ook convergent.
 - **Divergente minorante:** Als er een convergente reeks met positieve termen bestaat zodat $u_n \geq v_n$ voor elke $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), dan is ook divergent.
- **Integraaltest:** (B): stel dat een functie f continu, dalend en positief is in $[1, +\infty[$. Dan geldt: als convergeert (divergeert) dan zal ook convergeren (divergeren).
 - Harmonische reeks:
 - Hype harmonische reeks: (met $p > 0$)
 - $p > 1$: convergent
 - $p \leq 1$: divergent
- **Limiettest:** (B): stel dat en reeksen zijn met positieve termen; als met $l \in]0, +\infty[$
- **Criterium van Cauchy (worteltest)** (B): Stel dat een reeks is met positieve termen en dat Als $l < 1$ dan convergeert de reeks en als $l > 1$ dan divergeert de reeks.
- **Criterium van d' Alembert (ratiotest)** (B): Stel dat een reeks is met positieve termen en dat Als $l < 1$ dan convergeert de reeks en als $l > 1$ dan divergeert de reeks.

Absoluut convergente en alternerende reeksen

- (B) Als convergeert, dan convergeert ook (omgekeerde is niet waar).
- **Absoluut convergerende reeks:** een reeks waarvoor de reeks der absolute waarden convergent is.
- **Alternerende reeks:** een reeks waar in opeenvolgende termen een verschillend teken hebben.
- **Criterium van Leibniz** (B) Beschouw een dalende rij van positieve getallen u_n . Als dan is de alternerende reeks convergent.

Herschikking van termen is enkel toegelaten bij absoluut convergente reeksen.

Machtreeksen

- **Machtrees:** met a (middelpunt), u_n (coëfficiënt) en $x \in \mathbb{R}$
 - Convergent in het punt x_0 de getallenreeks is convergent
 - Convergent in het interval I convergeert voor elke x_0 van I

- Als de machtreeks convergeert in $x_0 \neq 0$ dan convergeert ze absoluut voor elke x met $|x| < |x_0|$.
Als de machtreeks divergeert in $x_0 \neq 0$ dan divergeert ze voor elke $|x| > |x_0|$.
- Machtreeks convergeert enkel voor $x = 0$ convergentiestraal = 0
- Machtreeks convergeert voor elke $x \in \mathbb{R}$ convergentiestraal = oneindig
- Er bestaat een positief getal r zodat de reeks absoluut convergent is voor $|x| < r$, en dan divergent is voor $|x| > r$. convergentiestraal = r
- **Afleidbaarheidseigenschap:** $f(x) = :$
 - F is afleidbaar in I
 - De afgeleide heeft eveneens I als convergentie interval
 - Voor elk punt uit I wordt $f'(x)$ gegeven door de reekssom van de afgeleide machtreeks

H8 Lineaire stelsels, matrices en determinanten

Lineaire stelsels en lineaire modellen

- **Productieproces:** een eenvoudige lijst van de hoeveelheid goederen die nodig zijn om een eenheid van het goed j te produceren.
- **Lineariteit:** de productie van k eenheden van een goed vraagt precies k keer de hoeveelheid die nodig is om 1 hoeveelheid van dat goed te maken.
- **Uniciteit:** er is slechts 1 manier om het goed i te produceren.

Oplossen van lineaire stelsels

- **Gauss eliminatie:** de methode waarbij men een gegeven stelsel reduceert tot men een stelsel krijgt waarin achterwaartse substitutie toepasselijk is.
- **Equivalenten stelsels:** elke oplossing van het eerste stelsel is ook een oplossing van het 2^e stelsel.
- **Gauss-Jordan eliminatie:** de oplossing van een Gausseliminatie gaan we elke vergelijking met een factor vermenigvuldigen zodat de eerste factor van elke vergelijking = 1.

Elementaire rij-operaties

- **Matrix:** een (rechthoekige) tabel van getallen.
- **Coëfficiëntenmatrix vs. uitgebreide matrix**
- **Gauss-gereduceerde vorm:** van de matrix die men verkrijgt op het einde van de Gauss-eliminatie.
- **Matrix in een gereduceerde vorm:**
 - Als een rij niet uitsluitend uit nullen bestaat, is het eerste van nul verschillend getal element van de rij gelijk aan 1, terwijl alle andere elementen uit de kolom waarin die 1 staat nul zijn.
 - Het leidende element in een rij staat rechts van het leidende element in een rij staat rechts van het leidende element in de vorige rij.

- Nul rijen staan steeds in de laatste rijen van de matrix.

Stelsel met veel of geen oplossingen

- **Basisvariabele:** voor een niet nul rij is het leidend element gelijk aan 1, als dit in kolom j staat, is het x_j een basisvariabele.
- **Vrije variabele:** kolom j bevat geen leidende elementen.

Eigenschappen over het aantal oplossingen van een stelsel

- **Nulrij:** een rij in een matrix waarvoor elk element gelijk is aan nul.
- **Rang van een matrix:** het aantal niet nulrijen in de matrix gereduceerde vorm.
- Stel dat A een coëfficiëntenmatrix is met m rijen en n kolommen, en $\hat{A}$ de uitgebreide coëfficiëntenmatrix is:
- $\text{Rang } A \leq \text{rang } \hat{A}$
- $\text{Rang } A \leq m$ (aantal rijen)
- $\text{Rang } A \leq n$ (aantal kolommen)
- (B) Een stelsel met een coëfficiëntenmatrix A en een uitgebreide matrix $\hat{A}$ heeft een oplossing $\text{rang } \hat{A} = \text{rang } A$.

Anders: $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b'$ (zo'n vergelijking van $\hat{A}$)

- Gevolg (2): een stelsel heeft ofwel geen oplossing, ofwel 1 oplossing, ofwel oneindig veel oplossingen.
- Als een lineair stelsel 1 oplossing heeft, heeft de coëfficiëntenmatrix A tenminste evenveel rijen als kolommen = een stelsel met een unieke oplossing heeft minstens zoveel vergelijkingen als er kolommen zijn.
- Als een stelsel meer onbekenden heeft dan vergelijkingen, dan bezit het ofwel geen oplossing, ofwel oneindig veel oplossingen.
- **Homogeen stelsel** (heeft steeds minsten 1 oplossing: $x_1 = \dots = x_n = 0$)
- Een homogeen stelsel met meer onbekenden dan vergelijkingen heeft oneindig veel oplossingen.
- (B) Een stelsel met coëfficiëntenmatrix A heeft een oplossing voor elke keuze ($b_1, b_2, \dots, b_n$) van het rechterlid $\text{rang } A = \text{aantal rijen van } A (= m)$.

Als een stelsel minder onbekenden heeft dan vergelijkingen, dan heeft de coëfficiëntenmatrix minder kolommen dan rijen. Omdat de rang niet groter is dan het aantal kolommen, volgt er hieruit dat er dan rechterleden bestaan waarvoor het stelsel geen oplossingen heeft:

- Voor een stelsel met meer vergelijkingen dan onbekenden, bestaan rechterleden zodanig dat het resulterende stelsel geen oplossingen heeft.
- (B) Een stelsel met coëfficiëntenmatrix A heeft hoogstens 1 oplossing voor elke keuze ($b_1, b_2, \dots, b_n$) $\text{rang } A = \text{aantal kolommen van } A (=n) = \text{het aantal onbekenden}$.

- Een coëfficiëntenmatrix A is niet-singulier (d.i. het corresponderend stelsel heeft een unieke oplossing voor elke keuze van het rechter lid) het aantal kolommen van A = het aantal rijen van A = rang A
- **Vierkante matrices:** matrices met een gelijk aantal kolommen en rijen.

Matrix algebra

- (B) Stel dat A een $(m \times n)$ matrix en B een $(n \times p)$ matrix is. Dan geldt: $((AB)^T) = B^T A^T$
- **Vierkante matrix:** het aantal rijen is gelijk aan het aantal kolommen.
 - **Diagonaal matrix:** elk element dat niet op de diagonaal ligt is 0.
 - **Boven triangulaire matrix:** elk element onder de diagonaal is 0.
 - **Onder triangulaire matrix:** elk element boven de diagonaal is 0.
 - **Symmetrische matrix:** $A^T = A$
 - **Idempotente matrix:** $AA = A$
 - **Permutatiematrix:** elk element is ofwel 0 of 1, zodanig dat elke rij en elke kolom precies 1 1 bevat.
 - **Niet singuliere matrix:** de rang is gelijk aan het aantal rijen; als dit een coëfficiëntenmatrix van een stelsel, heeft een unieke oplossing voor elke waarde van het rechterlid.
- **Rijmatrix:** de matrix bestaat maar uit 1 rij
- **Kolommatrix:** de matrix bestaat maar uit 1 kolom.
- Voor elke $(m \times n)$ matrix A bestaan er elementaire matrices $E_1, E_2, \dots, E_l$ zodanig dat het matrixproduct $U = E_l E_{l-1} \dots E_1 A$ de gereduceerde vorm van A voorstelt.

Inverse van een vierkante matrix

- Als A een rechtse inverse B en een linker inverse C heeft, is A inverteerbaar en $B = C = A^{-1}$
- Als A een inverteerbare $(n \times n)$ matrix is, dan is A niet singulier, en de unieke oplossing van het stelsel $Ax = b$ wordt gegeven door $x = A^{-1}b$.
- (B) Stel dat A niet-singulier is dan is A inverteerbaar.
- Enkele gelijkwaardige uitspraken voor een $(n \times n)$ matrix:
 - A is inverteerbaar (A heeft een linker en een rechter inverse)
 - Het lineair stelsel $Ax = b$ heeft tenminste 1 oplossing voor elke b .
 - Het lineair stelsel $Ax = b$ heeft ten hoogste 1 oplossing voor elke b .
 - A is niet-singulier
 - A heeft een maximale rang 'n'
 - Als A en B inverteerbare matrices zijn en $r \neq 0$:
 - $(A^{-1})^{-1} = A$

- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(rA)^{-1} = 1/r A^{-1}$
- $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$
- Elke matrix A kan geschreven worden als een product $A = F_1 F_2 \dots F_l U$, waarbij de F_i 's elementaire matrices zijn, en U de gereduceerde vorm van A voorstelt. Als A bovendien niet-singulier is, is $U = I$ en dus $A = F_1 F_2 \dots F_l$.
- Stel dat A een $(n \times n)$ matrix is met niet-negatieve elementen, en zo dat de som van de elementen in elke kolom kleiner is dan 1. Dan bestaat $(I - A)^{-1}$, en bovendien bezit ook deze matrix enkel niet-negatieve elementen.

Determinant

- De determinant van een $(n \times n)$ matrix: (voor elke index i en j):
-
-
- Gevolg: voor elke $(n \times n)$ matrix A is $\det A = \det A^T$

Eigenschappen van determinanten

- (B) Als een matrix B ontstaat door in een $(n \times n)$ matrix A twee rijen (of kolommen) te verwisselen, dan geldt $\det B = -\det A$
- Als 2 rijen (of kolommen) van A gelijk zijn, is $\det A = 0$.
- Als A een nul rij (of nul kolom) bevat, dan is $\det A = 0$.
- (B) Als een matrix B ontstaat door in een $(n \times n)$ matrix A alle elementen van een rij i (of kolom j) te vermenigvuldigen met een getal r, dan is $\det B = r \det A$.
- Als A een $(n \times n)$ matrix is, en B wordt bekomen door in A elk element a_{ik} van de i-de rij te vervangen door een getal c_k ($k = 1, 2, \dots, n$) dan is: (analoog voor kolom)
- (B) Stel dat A en B $(n \times n)$ matrices zijn die overal gelijk zijn, behalve in de rij i. Stel door C de matrix voor waarvan de i-de rij de matrixsom is van de i-de rij van A en B en waarvan de andere rij gelijk is aan de corresponderende rij van A of B: $\det A + \det B = \det C$
- (B) Voor een diagonaal matrix A is de determinant gelijk aan het product van zijn diagonaalelementen. Dit geldt ook voor een boven- of onder triangulaire matrix.
- (B) Als E een elementaire matrix is, dan geldt dat $\det(EA) = \det E \cdot \det A$
- (B) Een vierkante matrix A is niet-singulier $\det A$ is verschillend van 0.
- Voor $(n \times n)$ matrices A en B geldt dat: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Toepassingen van determinanten

- (B) Voor elke $(n \times n)$ matrix A geldt $A \cdot \text{adj}(A) = (\det A) \cdot I$ als A niet singulier is: $A^{-1} = \text{adj}(A) / \det(A)$

- (B) **regel van Cramer**: als A een niet-singuliere matrix is, wordt de unieke oplossing $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ van het stelsel $Ax = b$ gegeven door: waarbij B_j de matrix is die men verkrijgt door in A de j -de kolom te vervangen door het rechterlid b .