Overzicht berekenen van limieten

1. Inleiding:
   Vuistregels bij rekenen met ∞ en onbepaaldheden die voorkomen bij berekenen van limieten:
   (ONB = onbepaald = afhankelijk van de functie waarvan je de limiet berekent)

1) Optelling ($a \in R$)

$$a + \infty = +\infty + a = +\infty \qquad a + (-\infty) = a - \infty = -\infty + a = -\infty$$

$$a - (+\infty) = -\infty \qquad a - (-\infty) = +\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty + (-\infty) = +\infty - \infty = ONB \qquad -\infty + (+\infty) = -\infty + \infty = ONB$$

2) Vermenigvuldiging ($a \in R_0$)

$$a.(+\infty) = (+\infty).a = \begin{cases} +\infty \text{ } als \text{ } a > 0 \\ -\infty \text{ } als \text{ } a < 0 \end{cases} \qquad a.(-\infty) = (-\infty).a = \begin{cases} -\infty \text{ } als \text{ } a > 0 \\ +\infty \text{ } als \text{ } a < 0 \end{cases}$$

$$(+\infty).(+\infty) = +\infty \qquad (+\infty).(-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty).(+\infty) = -\infty \qquad (-\infty).(-\infty) = +\infty$$

$$0.(+\infty) = (+\infty).0 = ONB \qquad 0.(-\infty) = (-\infty).0 = ONB$$

3) Deling ($a \in R_0$)

$$\frac{a}{0} = \infty \qquad \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\frac{a}{0^+} = \begin{cases} +\infty \text{ } als \text{ } a > 0 \\ -\infty \text{ } als \text{ } a < 0 \end{cases} \qquad \frac{a}{0^-} = \begin{cases} -\infty \text{ } als \text{ } a > 0 \\ +\infty \text{ } als \text{ } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

$$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{\infty} = ONB \qquad \frac{0}{0} = ONB$$

4) Machten ($a \in R_0^+, n \in N_0$)

$$(+\infty)^{n} = +\infty \qquad (-\infty)^n = \begin{cases} +\infty \text{ } als \text{ } n \text{ } even \\ -\infty \text{ } als \text{ } n \text{ } ovenen \end{cases}$$

$$(+\infty)^{-n} = \frac{1}{(+\infty)^{n}} = 0 \qquad (-\infty)^{-n} = \frac{1}{(-\infty)^{n}} = 0$$

$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$ $\qquad$ $\sqrt[n]{-\infty} = \begin{cases} -\infty & als\ n\ oneven \\ bestaat\ niet & als\ n\ even \end{cases}$

$(+\infty)^0 = ONB$ $\qquad$ $0^\infty = ONB$

$0^0 = ONB$ $\qquad$ $(\infty)^\infty = ONB$

$a^0 = 1$ $\qquad$ $1^\infty = ONB$

Als $a > 1$: $\qquad$ $a^{+\infty} = +\infty$ $\qquad$ $a^{-\infty} = 0$

Als $a < 1$: $\qquad$ $a^{+\infty} = 0$ $\qquad$ $a^{-\infty} = +\infty$

2. Belangrijke opmerking:

   Kennis van het gedrag van de elementaire functies is onontbeerlijk voor berekening van limieten, i.h.b. de limieten op oneindig en in randpunten van het definitiegebied, moeten parate kennis zijn. De grafiek van de elementaire functies kan hierbij een hulpmiddel zijn. Zie het bestand "Element_functs.pdf", dat je terugvindt bij de documenten op de Minervasite van het monitoraat.

3. Berekening van limieten (rekentechnieken volgens soort limiet/functie/onbepaaldheid)

   1) Limieten van veeltermfuncties

   $\boxed{x \to a}$: $\quad \lim_{x\to a} V(x) = V(a)$ $\qquad$ (gewoon a invullen)

   $\boxed{x \to \pm\infty}$: $\quad \lim_{x\to \pm\infty} V(x) = \lim_{x\to\pm\infty} HGT$ (hoogste graad term)

   2) Limieten van rationale functies

   $\boxed{x \to a}$: Stap 1: vul a in

   Er zijn nu 3 mogelijkheden. Je bekomt ofwel:

   - $\boxed{\text{een reëel getal}}$: dit is de limiet.

   - $\boxed{\frac{getal \neq 0}{0} = \infty}$ Om het teken van ∞ te bepalen ga je als volgt te werk:

     Stap 2: Zet in de noemer de factor $x - a$ voorop (bvb. via de regel van Horner).

     $$\lim_{x\to a} \frac{T(x)}{N(x)} = \lim_{x\to a} \frac{T(x)}{(x-a)q(x)} = \frac{T(a)}{0.q(a)}$$

     (Indien $q(a) = 0$ moet je nogmaals de factor $x - a$ voorop plaatsen,…)

     Stap 3: maak indien nodig onderscheid tussen LL en RL en bepaal zo het teken van ∞.

   - $\boxed{\frac{0}{0} = ONB}$

Stap 2: Zet in teller en noemer de factor $x - a$ voorop (bvb via de regel van Horner) en deel deze weg. Vul opnieuw a in en herhaal desgevallend bovenstaande stappen.

$\boxed{x \to \pm\infty}$: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{T(x)}{N(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{HGTT}{HGTN}$

(hoogste graad term teller / hoogste graad term noemer)

3) Limieten van irrationale functies

$\boxed{x \to a}$: Stap 1: vul a in

Er zijn een aantal mogelijkheden:

- $\boxed{\text{een reëel getal}}$: dit is de limiet.

- $\boxed{\frac{getal \neq 0}{0} = \infty}$ Om het teken van ∞ te bepalen kan je als volgt te werk gaan:

  * Als de noemer een veelterm is: zet in de noemer de factor $x - a$ voorop en ga verder te werk zoals bij rationale functies.

  * Als de noemer wortels bevat. Bepaal het teken van de noemer in de buurt van a. Maak indien nodig onderscheid tussen LL en RL.

- $\boxed{\frac{0}{0} = ONB}$

  Stap 2: De factor $x - a$ zit verborgen in teller en noemer. Vermenigvuldig teller en/of noemer met de respectievelijk toevoegde wortelvorm ervan. Na vereenvoudiging kan je de factor $x - a$ wegdelen. Vul opnieuw a in en herhaal indien nodig de stappen.

$\boxed{x \to \pm\infty}$: Tracht de limiet te bepalen door de bovenstaande regels voor veeltermfuncties en de vuistregels voor rekenen met ∞ te gebruiken. Als dit geen bepaald resultaat oplevert heb je meestal een onbepaaldheid van een van volgende types: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ of $0.\infty$.

Je kan dan 1 van de volgende technieken proberen (eventueel gecombineerd met mekaar):

- Zet de hoogste graad termen voorop. Hiertoe moet je meestal hoogste graad termen vanonder de wortel halen. Hou hierbij rekening met

  $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x \; als \; x \geq 0 \\ -x \; als \; x \leq 0 \end{cases}$

  (Maak dus onderscheid tussen + en - ∞).
- Vermenigvuldig met de toegevoegde wortelvorm van teller en/of noemer. Vereenvoudig en pas dan de eerste techniek toe.

4) Limieten van andere functies

$\boxed{x \to a}$: Vul a in, gebruik je kennis van de limieten van de optredende elementaire functies, maak waar dat nodig is onderscheid tussen linker- en rechterlimiet. Maak indien nodig gebruik van de technieken uit de volgende paragrafen.

$\boxed{x \to \pm\infty}$: Gebruik je kennis van de limieten op oneindig van de optredende elementaire functies en maak waar dit nodig is onderscheid tussen + en - ∞. Maak indien nodig gebruik van de technieken uit de volgende paragrafen.

5) Regel van de l'Hopital

De regel van de l'Hopital **mag enkel** gebruikt worden als een van de volgende onbepaaldheden optreden: $\frac{\infty}{\infty}$ of $\frac{0}{0}$

Regel van de l'Hopital:

$$\boxed{\lim_{x\to\cdots}\frac{T(x)}{N(x)} = \lim_{x\to\cdots}\frac{T'(x)}{N'(x)}}$$

(de afgeleide van de teller / de afgeleide van de noemer)

6) Onbepaaldheid van de vorm $0.\infty$

Deze onbepaaldheid kan omgevormd worden naar de onbepaaldheid $\frac{\infty}{\infty}$ of $\frac{0}{0}$ door een van de optredende factoren omgekeerd te schrijven in de noemer:

$\lim_{x\to\ldots} p(x).q(x) = \lim_{x\to\ldots}\frac{p(x)}{\frac{1}{q(x)}}$ of $\lim_{x\to\ldots} p(x).q(x) = \lim_{x\to\ldots}\frac{q(x)}{\frac{1}{p(x)}}$

Pas dan de regel van de l'Hopital toe.

7) Onbepaaldheden die optreden bij exponentiële functies

Bij de berekening van een limiet van het type: $\lim_{x\to\ldots}(f(x))^{g(x)}$

kunnen volgende onbepaaldheden optreden: 0^0 , 1^∞ , ∞^0 , 0^∞ , ∞^∞

Werkwijze:

Stap 1: bepaal de limiet van de ln van de gegeven functie

$$\lim_{x\to\cdots}\ln(f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to\cdots} g(x).\ln(f(x))$$

Deze is ofwel bepaald ofwel krijg je een onbepaaldheid van de vorm $0.\infty$. Ga tewerk zoals in 6) om deze limiet verder te berekenen. Stel dat het resultaat hiervan A is.

Stap 2: Het resultaat van de oorspronkelijke limiet is dan e^A

(Als $A = \pm\infty$ gebruik je de vuistregels uit de inleiding m.a.w. het gedrag op ∞ van de exponentiële functie)