



Examen: Wiskunde voor bedrijfskundigen II
Academiejaar: 2017/2018

BA & SP Handelswetenschappen
Zittijd: 1

- ☞ Duur van het examen: 3u.
- ☞ Het gebruik van een zakrekenmachine is NIET toegelaten. Laat getallen die je zonder rekenmachine niet kan berekenen gewoon staan (zoals bijvoorbeeld e^{-2} , $\log_2 \pi$, $\sqrt{3}$, etc.).
- ☞ Totaal: op 70.

1. (a) 6 ptn Een vierkante matrix kan slechts één inverse matrix bezitten. Bewijs.
- (b) 6 ptn Beschouw een gebonden extremumprobleem met doelfunctie $z = f(x, y)$ en nevenvoorwaarde $g(x, y) = b$. Zij $(x, y) = (x^*(b), y^*(b))$ een kritiek punt van de Lagrangefunctie met Lagrangemultiplicator $\lambda = 2$. Waaraan is $\frac{df(x^*(b), y^*(b))}{db}$ gelijk? Bewijs.
2. 8 ptn Waarom is de volgende integraal oneigenlijk? Bereken deze.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{2-2\ln x}} dx$$

3. (a) 3 ptn Zij $V(t)$ het verkoopcijfer van een bepaald type auto als functie van de tijd t . Er is geconstateerd dat de relatieve groei van $V(t)$ recht evenredig is met de proportie niet-bezitters van deze auto in de populatie. Zij N de grootte van deze populatie. Schrijf een differentiaalvergelijking neer waaraan $V(t)$ voldoet.
- (b) 6 ptn Los het volgende randvoorwaardeprobleem expliciet op:

$$y^2 dx - (1-x)dy = 0 \quad \text{met } y(0) = 0$$

4. Een regionale economie is ingedeeld in 2 bedrijfstakken A en B , en heeft de volgende input-outputtabel:

	A	B	ext. vraag
A	25	60	15
B	75	20	25

- (a) 2 ptn Bepaal de technologiematrix.
- (b) 5 ptn Bereken de outputmultiplicator van bedrijfstak B . Wat is de betekenis van dit getal?
- (c) 3 ptn Door een externe vraagschok moet de totale output bijgesteld worden: een toename met 4 eenheden bij bedrijfstak A en een afname met 2 eenheden bij bedrijfstak B . Hoe groot is dan de schok geweest in de externe vraag naar producten van bedrijfstak A ?

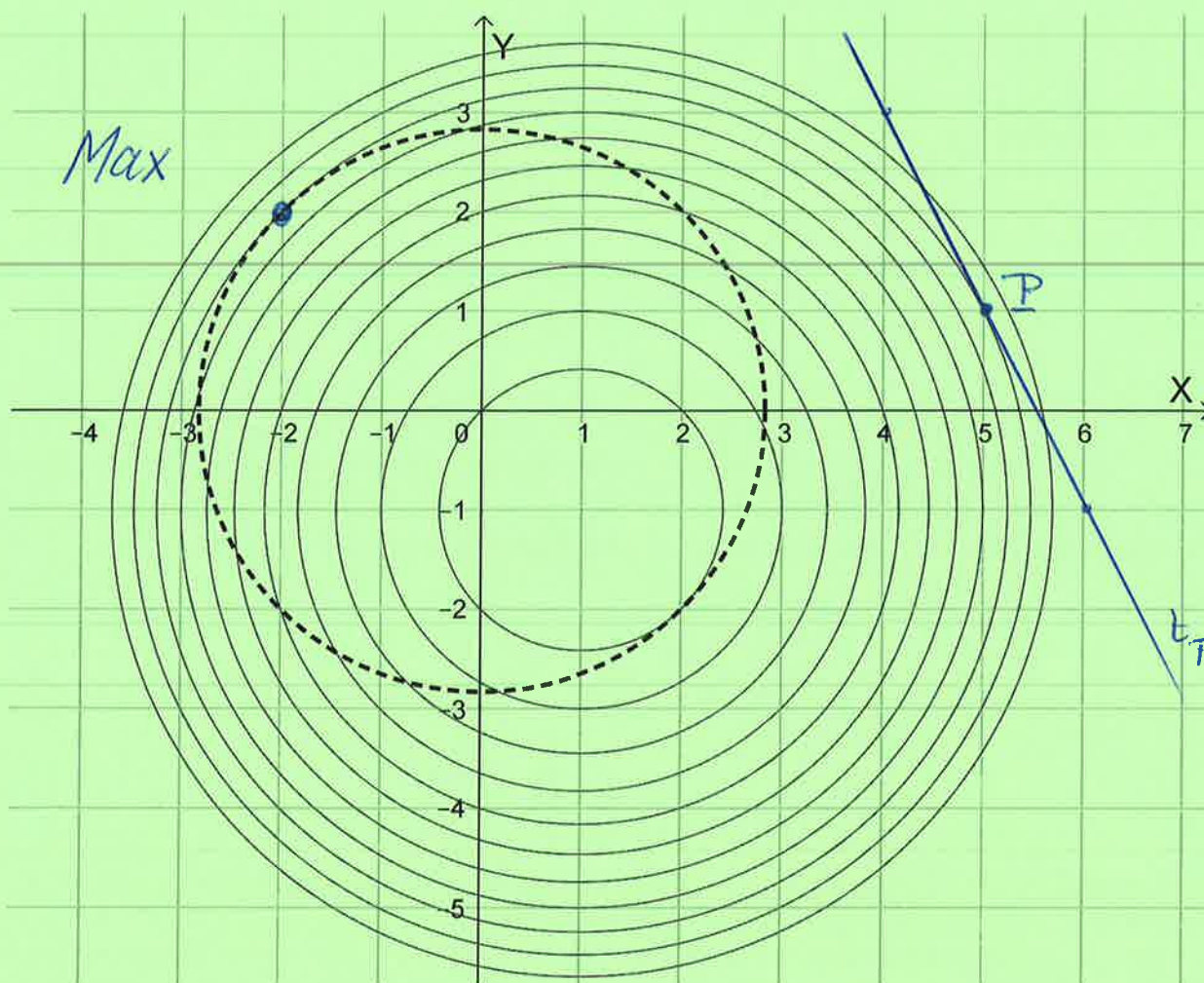
5. De productie van drie bedrijfstakken A, B en C wordt op het ogenblik t gegeven door x_t , y_t en z_t . De evolutie doorheen de tijd wordt beschreven door het volgende stelsel

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad \text{met } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) 3 ptn Is $\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ een eigenvector van M ? Zo ja, met welke eigenwaarde? Gebruik de definitie om je antwoord te geven.

- (b) 13 ptn Bepaal x_t , y_t en z_t als functie van t , wanneer $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$. Bepaal ook $\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}$.

6. Gegeven is de functie $z = f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2x + 1) + y$. Op de bijbehorende figuur zijn een aantal niveaukrommen van f getekend. De stippelijnkromme komt overeen met $x^2 + y^2 = 8$.



- (a) 5 ptn Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt $(5, 1)$ aan de niveaukromme van f door dat punt. Teken je gevonden rechte op de figuur.
- (b) 3 ptn In welk punt van de stippelijnkromme bereikt f een lokaal gebonden maximum met nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 8$? Geef een grafische reden en duid dat punt aan op de figuur.
- (c) 7 ptn Bereken de kritieke punten van de Lagrangefunctie bij f en de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 8$.

VRAAG 1.

Antwoord:

Uitwerking:

1a) B, C inverse van A

$\forall B: B = C$

Bewijs: $B = B \cdot E_n$

$= B \cdot (AC)$

$= (B \cdot A) \cdot C$

$= E_n \cdot C$

$= C$

 E_n : neutr. elem. van vermenigv. $AC = E_n$, want C inv. van A

associativiteit

 $BA = E_n$, want B inv. van A E_n : neutr. elem.b) Is gelijk aan I^* , dus 2Bewijs: zie cursus

2. 8 ptn Waarom is de volgende integraal oneigenlijk? Bereken deze.

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{2-2\ln x}} dx$$

De integrand heeft een discontinuïteit in bovengrens $x_0 = e$

$$I = \lim_{t \rightarrow e} \int_1^t \frac{\ln x}{x\sqrt{2-2\ln x}} dx$$

1) berekening primitieve functie

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x\sqrt{2-2\ln x}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln x}} dx & \text{Stel } u = 1 - \ln x \Leftrightarrow \ln x = 1 - u \\ & & -du = \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1-u}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int u^{-1/2} du + \frac{1}{\sqrt{2}} \int u^{1/2} du \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{u^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{u^{3/2}}{3/2} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\ln x} + \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(1-\ln x)^3} \end{aligned}$$

2) berekening oneigenlijke integraal

$$I = \lim_{t \rightarrow e} \left[-\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\ln x} + \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(1-\ln x)^3} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow e} \left[-\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\ln t} + \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(1-\ln t)^3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\ln 1} - \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(1-\ln 1)^3} \right]$$

$$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$3a \quad \frac{dV}{dt} = k V \cdot \frac{N-V}{N}$$

$$b \quad y = 0$$

$$3a \quad \frac{dV/dt}{V} = k \frac{N-V}{N} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = k \cdot V \cdot \frac{N-V}{N}$$

$$3b \quad y^x dx - (1-x) dy = 0 \quad y(0) = 0$$

$$y^x dx = (1-x) dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-x}{y^x}$$

$$-\ln|1-x| + C = -\frac{1}{y}$$

$$y \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Ald. } y = \frac{1}{\ln|1-x| + C} \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{SO: } y=0 \text{ voldoet aan de opgegeven vergelijking}$$

$$\text{met } y(0) = 0$$

De enige oplossing die hiernaan voldoet is de s.o. $y=0$ (= constante functie op 0)

VRAAG 4.

Antwoord:

Uitwerking:

		FL	X
25	60	15	100
75	20	25	120

$$(a) \quad T = \begin{bmatrix} \frac{25}{100} & \frac{60}{120} \\ \frac{75}{100} & \frac{20}{120} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad m_B? \quad L = E_2 - T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = \frac{1}{\det L} \cdot \text{adj } L = 4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^T = 4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{24} - \frac{3}{8} = \frac{15-9}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow m_B = 2 + 3 = 5$$

Betekenis: Voor elke € toename in de externe vraag van bedrijfstak B, dient de gehele economie haar output te verhogen met 5 €.

$$(c) \Delta X = \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix}$$

gev: ΔFL_A ?

opl:

$$\Delta F = L \cdot \Delta X$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 1 \\ -3 + \left(-\frac{5}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{-9-5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

Antwoord: Toename met 4 eenheden
bij bedrijfstak A

5. De productie van drie bedrijfstakken A, B en C wordt op het ogenblik t gegeven door x_t , y_t en z_t . De evolutie doorheen de tijd wordt beschreven door het volgende stelsel

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad \text{met } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) 3 ptn Is $\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ een eigenvector van M ? Zo ja, met welke eigenwaarde? Gebruik de definitie om je antwoord te geven.

- (b) 13 ptn Bepaal x_t , y_t en z_t als functie van t , wanneer $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$. Bepaal ook $\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 0 \\ \frac{1}{8} \cdot 20 = \lambda \cdot 10 \\ \frac{1}{2} \cdot 10 = \lambda \cdot 20 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\text{ja, met } \lambda = \frac{1}{4}}$

b) 1. EV.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \left(\lambda^2 - \frac{1}{16} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} \\ \lambda_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2. EV

2.1. $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ -x_2 + \frac{1}{8}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{x_3}{8} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{x_3}{8} - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{x_3}{16} \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = n \end{cases} \Rightarrow \underline{u} = n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad n \in \mathbb{R}_0$$

2.2. $\lambda_2 = \frac{1}{4}$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{8}x_3 = 0 \text{ stel } x_2 = s \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 2s \end{cases} \Rightarrow \underline{v} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad s \in \mathbb{R}_0$$

2.3. $\lambda_3 = -\frac{1}{4}$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{8}x_3 = 0 \text{ stel } x_2 = t \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -2t \end{cases} \Rightarrow \underline{w} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}_0$$

3. Beginsituatie als lico v. EV

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = c_1 \\ 10 = c_2 + c_3 \\ 20 = 2c_2 - 2c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 10 \\ c_2 = 10 - c_3 \\ 20 = 2(10 - c_3) - 2c_3 \Rightarrow 20 = 20 - 2c_3 - 2c_3 \Rightarrow c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 10 \\ c_2 = 10 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

4. Formule van Sylvester:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = M^t \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = 10 \cdot 1^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_t = 10 \\ y_t = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^t \\ z_t = 20 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^t \end{cases}$$

5. Situatie op L.T.

$$\begin{bmatrix} x_{t \rightarrow \infty} \\ y_{t \rightarrow \infty} \\ z_{t \rightarrow \infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wi II '17-'18 januari Verne 1

$$6 \quad f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2x + 1) + y$$

a Raaklyn in $(5, 1) = T$

Niveaulyn $\frac{1}{2}(25 + 1 - 10 + 1) + 1 = \frac{19}{2}$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x + y = 9$$

Totale diff. $(x-1)dx + (y+1)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{1+y} \quad \frac{dy}{dx}(5, 1) = \frac{-4}{2} = -2$$

$$t_T \rightarrow y - 1 = -2(x - 5)$$

$$y = -2x + 11$$

b. Raakpunten niveaulynen-restrictie $(-2, 2); (2, -2)$
 Niveau $(2, -2)$: $\frac{1}{2}(4 + 4 - 4 + 1) - 2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2} \min$

Niveau $(-2, 2)$: $\frac{1}{2}(4 + 4 + 4 + 1) + 2 = \frac{13}{2} + \frac{4}{2} = \frac{17}{2} \max$
 $(-2, 2)$ op hoogste niveaulyn.

$$c \quad L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2x + 1) + y - \lambda(x^2 + y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = x - 1 - 2\lambda x = 0 & \times y \\ \frac{\partial L}{\partial y} = y + 1 - 2\lambda y = 0 & \times x \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - y - 2\lambda xy = 0 & (1) \\ xy + x - 2\lambda xy = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \begin{cases} -y - x = 0 \\ x - 1 - 2\lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ \lambda = (x-1)/2x \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ \lambda = +3/4 \end{cases}$$