

Examen: Wiskunde voor bedrijfskundigen I-A / Wiskunde I-A
handelswetenschappen

Bachelor of Science in de

Academiejaar: 2015/2016

Zittijd: 1

FAMILIENAAM: *MODEL OPLOSSING*
Voornaam: *Paars / Blauw*
Studentennummer:

Volgnr.:

Vraag	Behaalde punten	Op
1		12
2		7
3		9
4		7
5		8
6		7
Totaal		50

KRUIS AAN WAT VAN TOEPASSING IS:

Ik ben:

- ☐ student modeltraject
☐ GIT-student

ALGEMENE RICHTLIJNEN VOOR HET MAKEN VAN HET EXAMEN:

- ☞ Duur van het examen: 2u30.
- ☞ Controleer of deze opgavenbundel compleet is door de paginanummering na te kijken.
- ☞ Voor de definitieve antwoorden gebruik je deze bundel en voor kladberekeningen het blank papier. Scheid bij het afgeven zorgvuldig het net van het klad.
- ☞ Noteer steeds je naam op elk beschreven kladblad.
- ☞ Gelieve geen rood of potlood te gebruiken.
- ☞ Het gebruik van een zakrekenmachine is NIET toegelaten. Laat getallen die je zonder rekenmachine niet kan berekenen gewoon staan (zoals bijvoorbeeld e^{-2} , $\log_2 \pi$, $\sqrt{3}$, etc.).
- ☞ In dit examen moeten alle limieten bepaald worden zonder te steunen op de *regel van de l'Hospital*.
- ☞ Een eindresultaat zonder verklarende argumenten of berekeningen wordt niet gehonoreerd, zelfs indien dit resultaat correct is.

- ☞ Bij het afgeven onderteken je de aanwezigheidslijst. Jouw volgnummer noteer je op de voorziene plaats hierboven op dit blad.

1. (a) 5 ptn **Vul in.** Geef je antwoord in de tweede kolom naast het vraagnummer.
(Scoreberekening: 1 pt per correct antwoord, 0 pt per foutief antwoord.)

- | | |
|---|---|
| 1) Als f een oneven functie is en $f(1) = -2$, dan $f(-1) = \dots$ | 1) <u>2</u> |
| 2) Geef de vergelijking van de verticale asymptoot aan het deel van de grafiek van de tangensfunctie op het interval $[2\pi, 3\pi]$. | 2) <u>$x = \frac{5\pi}{2}$</u> |
| 3) $\text{Bgc}(-1/2) = \dots$ | 3) <u>$\frac{2\pi}{3}$</u> |
| 4) $\ln(e^2) = \log_{\dots} 10$ | 4) <u>$\sqrt[3]{10}$</u> |
| 5) Zij f en g negatieve functies met $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$.
Dan $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)/g(x) = \dots$ | 5) <u>$+\infty$</u> |

- (b) 3 ptn **Juist of fout?** Indien juist, argumenteer. Indien fout, leg uit met een concreet tegenvoorbeeld.

Als $\text{dom } f = \mathbb{R}$, dan geldt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ voor elke $a \in \mathbb{R}$.

FOUT

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ betekent: f is continu in a
- als $a \in \text{dom } f$, dan hoeft f niet continu te zijn in a
- TVB: een f met $\text{dom } f = \mathbb{R}$ en met minstens één discont. punt

$$\text{vb: } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

- (c) 4 ptn Er is gegeven dat $y = mx + b$ een SA is van de functie f op $+\infty$. Met welke limietformule is m te vinden uit het voorschrift van f ? Bewijs.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Bewijs: $y = mx + b$ is SA van f op $+\infty$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = mx + b + v(x) \quad \text{met} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = m + \frac{b}{x} + \frac{v(x)}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m + 0 + \frac{0}{+\infty} = m$$

2. Gegeven is de functie

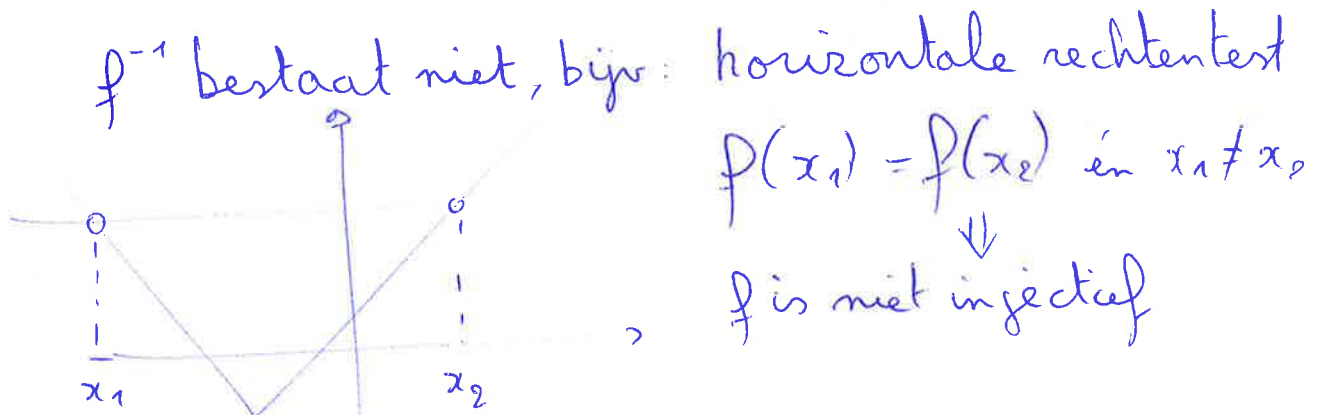
$$f(x) = 1 + |2x - 4|$$

- (a) 3 ptn Welke transformaties zijn er uitgevoerd uitgaande van de basisfunctie $g(x) = |x|$? Geef alle tussenstappen en telkens de grafische betekenis ervan.

Transformatie	Effect
$f_1(x) = 2g(x) = 2 x $	schaalvergroting met factor 2
$f_2(x) = f_1(x-2) = 2 x-2 = 2x-4 $	horizontale verschuiving naar rechts met 2 eenheden
$f_3(x) = f_2(x) + 1 = 2x-4 + 1$	verticale verschuiving naar boven met 1 eenheid

- (b) 4 ptn Bestaat de inverse functie f^{-1} ? Argumenteer.

Indien ja, bepaal het voorschrift van f^{-1} . Indien neen, bepaal het beeld van f .



of wiskundig aantonen, vertrekkend van $f(x_1) = f(x_2)$:

$$1 + |2x_1 - 4| = 1 + |2x_2 - 4|$$

$$\Leftrightarrow |2x_1 - 4| = |2x_2 - 4|$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 - 4 = 2x_2 - 4 \quad \text{of} \quad 2x_1 - 4 = -(2x_2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{of} \quad \Leftrightarrow 2x_1 = -2x_2 + 8$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2 + 4$$

bls $f = [1, +\infty[$, want $y-1 \geq 0$

3. 9 ptn Bepaal het domein van de volgende functie:

$$f(x) = \frac{\sqrt{200 - 2x^2}}{\ln(3e^x + 10) - 2x}$$

BVW: ① $200 - 2x^2 \geq 0$

② $\ln(3e^x + 10) - 2x \neq 0$

③ $3e^x + 10 > 0 \rightarrow$ steeds voldaan
want $e^x > 0$

Uitwerking:

① $200 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 200 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$

x	-10	10
$200 - 2x^2$	$-$	$+$
	0	0
	$-$	$-$

$\hookrightarrow x \in [-10, 10]$

② $\ln(3e^x + 10) \neq 2x$

$\Leftrightarrow 3e^x + 10 \neq e^{2x}$

$\Leftrightarrow -e^{2x} + 3e^x + 10 \neq 0$ stel $Y = e^x$

$\Leftrightarrow -Y^2 + 3Y + 10 \neq 0$

$D = 49 \rightarrow Y = \frac{-3 \pm 7}{-2} < \begin{matrix} 5 \\ -2 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow e^x \neq 5$ en $e^x \neq -2$

$\downarrow$
 $x \neq \ln 5$

steeds voldaan (onmogelijk, want $e^x > 0$)

Conclusie: ①, ② en ③ samen

$\text{dom } f = [-10, 10] \setminus \{\ln 5\}$

4. De winstfunctie $W = W(q)$ van een onderneming is een kwadratische functie van q , met q het aantal geproduceerde eenheden van het door haar vervaardigd product. Er is ook bekend dat de winst gemaximaliseerd wordt bij een productie van 50 eenheden en dat deze maximale winst gelijk is aan 1250. De onderneming draait break-even bij $q = 100$.

- (a) 4 ptn Bepaal het voorschrift van deze winstfunctie.

$$\text{top } W(q) : (50, 1250)$$

$$W(q) = a \cdot (q - 50)^2 + 1250$$

$$\text{break-even} : O(q) = K(q) \Rightarrow W = 0$$

$$W(100) = 0, \text{ dus } a(100 - 50)^2 + 1250 = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot 2500 + 1250 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{W(q) = -\frac{1}{2}(q - 50)^2 + 1250}$$

$$= -\frac{1}{2}(q^2 - 100q + 2500) + 1250 = -\frac{1}{2}q^2 + 50q$$

- (b) 3 ptn Bepaal het voorschrift van de bijhorende prijsfunctie $p = p(q)$, in de onderstelling dat er een eenheidskost van 5 geldeenheden is.

$$W(q) = -\frac{1}{2}q^2 + 50q$$

$$\text{en } W = TO - TK$$

$$= p \cdot q - 5 \cdot q$$

$$-\frac{1}{2}q^2 + 50q = p \cdot q - 5q$$

$$-\frac{1}{2}q^2 + 55q = p \cdot q$$

$$\Rightarrow \boxed{p(q) = \frac{-\frac{1}{2}q^2 + 55q}{q} = -\frac{1}{2}q + 55}$$

5. 8 ptn Bepaal het continuïteitsgebied van de functie

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{als } x < 1 \\ \frac{(x-1)(x-4)}{2x^2-5x+3} & \text{als } x \geq 1 \end{cases} \rightarrow \text{cont. voor } x < 1$$

(*) $\hookrightarrow$ rationale fte dus cont. in elk inw. pt w/h
Ga voor elk discontinuïteitspunt na of het om een essentiële of ophefbare discontinuïteit gaat. domein

$$(*) \text{ BVW: } \left. \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 \neq 0 \\ x \neq 1 \text{ en } x \neq \frac{3}{2} \end{array} \right\} \text{ domein} = \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$$

$$\frac{(x-1)(x-4)}{2x^2-5x+3} \text{ cont. in }]1, +\infty[\setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{(x-1)(x-4)}{2x^2-5x+3} = \frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-4\right)}{0} = \frac{\frac{2}{0}}{0} \rightarrow LL/RL \in \{-\infty, +\infty\}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ essentieel disctn in } \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{2x^2-5x+3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{(x-1)}(2x-3)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3 = 3 = f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$$

$$\Rightarrow f \text{ is cont. in } 1$$

$$\Rightarrow \text{enkel } x = \frac{3}{2} \text{ is discont. pt van } f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{cont. gebied} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

6. 7 ptn Bepaal alle asymptoten aan de grafiek van de functie $y = 3x + \sqrt{2+x} - \sqrt{x-2}$.

$$\text{dom } f = [2, +\infty[$$

VA: geen: irrationale fctie zonder noemer

SA: enkel rechts

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{2+x} - \sqrt{x-2}}{x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{x-2} - \cancel{3x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2+x) - (x-2)}{\sqrt{2+x} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{N(x)} = 0 \end{aligned}$$

SA: $y = 3x$ (enkel op $+\infty$)

RHA: geen wegens reeds RSA

Opmerking 1

Aangezien $y = 3x + \sqrt{2+x} - \sqrt{x-2}$



lineaire uitdrukking

is RSA: $y = 3x$ als $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2+x} - \sqrt{x-2} = 0$.

Dit laatste is voldaan. Zie de berekeningen om b te bepalen.

Opmerking 2

Uitwerking om (*) te vinden

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{2+x} - \sqrt{x-2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{x-2}}{x} \right) = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{x-2}}{x}$$

$$= 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} \right) - x \left(\sqrt{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} \right)}{x}$$

$$= 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = 3$$

Deze methode komt hier dus overeen
met de methode van
"quotient hoogste exponentstermen"