MODEL OPLOSSING

FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE

UNIVERSITEIT GENT

Examen: Wiskunde voor bedrijfskundigen II
Academiejaar: 2016/2017

BA & SP Handelswetenschappen
Zittijd: 2

- Duur van het examen: 3u.
- Het gebruik van een zakrekenmachine is NIET toegelaten. Laat getallen die je zonder rekenmachine niet kan berekenen gewoon staan (zoals bijvoorbeeld e^{-2}, $\log_2 \pi$, $\sqrt{3}$, etc.).
- Totaal: op 60 punten.

1. (a) $\boxed{5 \text{ ptn}}$ Bewijs dat eenzelfde vierkante matrix geen twee verschillende inverse matrices kan hebben.

   (b) $\boxed{2 \text{ ptn}}$ **Gegeven:** X en Y zijn $(p \times 1)$-matrices en $B = (X^{\mathsf{T}}X)^{-1}X^{\mathsf{T}}Y$. **Gevraagd:** het formaat van B, in de onderstelling dat deze matrix bestaat.

   (c) $\boxed{3 \text{ ptn}}$ *Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.* Als AB = nulmatrix, dan is A een nulmatrix of B een nulmatrix.

a) zie theorie

b) formaat : 1×1

c) tegenvoorbeeld: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\int_0^1 \frac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$$

Stap 1: $\displaystyle\int \frac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$ $\qquad u = x^2-3x+2$

$\qquad du = (2x-3)\,dx$

$$= \int \frac{2\,du}{u^{1/2}} = 4\sqrt{u} + c$$

$$= 4\sqrt{x^2-3x+2} + c \qquad (*)$$

Stap 2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x+2}} \overset{*}{=} \lim_{t \xrightarrow{<} 1} \int_0^t \frac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$

Via (*)

$$= \lim_{t \xrightarrow{<} 1} \left[4\sqrt{t^2-3t+2} - 4\sqrt{2} \right]$$

$$= 0 - 4\sqrt{2}$$

(*) 1 is oorzaak voor de oneigenlyke integ

$N(1) = 0$

vraag 2

$$y'(t) = -y(t)\ln y(t)$$

(a) $\forall t \in \mathbb{R}: \; y(t) > 0.$ $y(t)$ is argument ln-f^tie

(b) $\displaystyle\int \frac{dy}{y\ln(y)} = -\int dt$

$u = \ln y$

$du = \dfrac{1}{y}\, dy$

$\displaystyle\Leftrightarrow \int \frac{du}{u} = -t + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \ln|u| = \ln|\ln y| = -t + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow |\ln y| = e^{-t+c} = e^{-t} \cdot e^{c} = Ce^{-t} \qquad C \in \mathbb{R}_0^+$

$\Leftrightarrow \ln y = \bar{C}e^{-t} \qquad \bar{C} \in \mathbb{R}_0$

$\Leftrightarrow y = e^{\bar{C}e^{-t}} \qquad \bar{C} \in \mathbb{R}_0$

(c) Voorwaarde $y(0) = 1$

$y(0) = e^{\bar{C}e^{-0}} = e^{\bar{C}} = 2$

$\Leftrightarrow \bar{C} = \ln 2$

P.O: $y(t) = e^{\ln 2 \cdot e^{-t}} = \left(e^{\ln 2}\right)^{e^{-t}}$

$= 2^{(e^{-t})}$

$$W(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy} \quad \text{met } x=\sqrt{2t};\ y=\sqrt{8t}$$

(a) $W(x(t), y(t)) = \frac{2t+8t}{4t} = \frac{10t}{4t} = 2{,}5$

(b) Zie (a) $W(t)$ is onafhankelijk van t

(c) $dy = +2$ bij $x=2$ en $y=4$

$$W(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy$$

$$= \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right)dy$$

In $x=2;\ y=4$ $\quad dW = \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4}\right)dx + \left(\frac{-2}{16} + \frac{1}{2}\right)dy$

$$= -\frac{3}{4}dx + \frac{3}{8}dy$$

$dW = 0 \iff dx = \frac{3/8\,dy}{3/4} = \frac{1}{2}dy$

Gegeven is verder: $dy = 2$

We vinden in dit geval met $dW=0$

$dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. De economische groei x stijgt met 1 eenheid.

Opm.: de oefening kan eveneens worden opgelost door zowel W, x, y als functie van t te beschouwen. Je vindt

$dy = 2$; $t=2$; $dt = 2$ en dus ook $dx = 1$

5. [14 ptn] Op drie plaatsen in Gent: de Sterre (S), Blandijn (B) en Mercator (M) staan studentenfietsen van de UGent. Studenten kunnen er enkel mee fietsen tussen S, B en M. Het wekelijkse fietsenverloop tussen de drie locaties wordt door het volgend stelsel differentievergelijkingen, waarbij x_t, y_t en z_t het aantal fietsen zijn die na t weken respectievelijk op de plaatsen S, B en M staan.

$$\begin{cases} x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}y_t + \frac{1}{2}z_t \\ y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}y_t \\ z_{t+1} = \frac{1}{2}z_t \end{cases}$$

Er is vastgesteld dat er na één week 60 fietsen aan de Sterre, 60 fietsen aan de Blandijn en 380 fietsen aan Mercator staan (d.w.z. $x_1 = 60$, $y_1 = 60$ en $z_1 = 380$).

(a) [9 ptn] Los het stelsel differentievergelijkingen algemeen op.

(b) [3 ptn] Bereken het aantal fietsen die na 3 weken aan Mercator staan.

(c) [2 ptn] Bereken hoeveel fietsen er op elke plaats zullen staan op de lange duur.

a)

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

1) EW van M: $\det(M - \lambda E_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0{,}5-\lambda & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xleftrightarrow{R_1 \to R_1+R_2+R_3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0{,}5 & 0{,}5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5-\lambda & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0{,}5-\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(0{,}5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(0{,}5-\lambda)(0{,}5-\lambda-0{,}5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0{,}5 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

2) EV van M:

2.1. $\lambda_1 = 0$: $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ stel $x_1 = r$ $\Rightarrow x_2 = -r$ $\Rightarrow r\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $r \in \mathbb{R}_0$

2.2. $\lambda_2 = 0{,}5$: $\begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ stel $x_2 = s$ $\Rightarrow x_3 = -s$ $\Rightarrow s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $s \in \mathbb{R}_0$

2.3. $\lambda_3 = 1$: $\begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$ stel $x_1 = t$ $\Rightarrow x_2 = t$ $\Rightarrow t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $t \in \mathbb{R}_0$

3) Beginsituatie als lico van EV:

$$\begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 380 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 = 60 \\ -c_1 + c_2 + c_3 = 60 \\ -c_2 = 380 \Leftrightarrow \boxed{c_2 = -380} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 = 60 \\ -c_1 + c_3 = 440 \end{cases} \qquad 2c_3 = 500 \Leftrightarrow \boxed{c_3 = 250} \Rightarrow \boxed{c_1 = -190}$$

4) Formule van Sylvester:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = M^{t-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = -190 \cdot (0)^{t-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 380 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 250\,(1)^{t-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_t = 250 \\ y_t = 250 - 380 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \\ z_t = 380 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \end{cases}$$

$(t > 1)$

vraag 5

(b) 3 ptn Bereken het aantal fietsen die na 3 weken aan Mercator staan.

(c) 2 ptn Bereken hoeveel fietsen er op elke plaats zullen staan op de lange duur.

b) 3 weken : $t=3$

$$z_3 = 380 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{380}{4} = \boxed{95}$$

c) lange duur : $t \to +\infty$

$$x_\infty = \lim_{t\to+\infty} 250 = \boxed{250}$$

$$y_\infty = \lim_{t\to+\infty} 250 - 380 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} = \boxed{250}$$

$$z_\infty = \lim_{t\to+\infty} 380 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} = \boxed{0}$$

vraag 5 vervolg

$$U(q_1 q_2) = q_1^3 + q_2^3 \qquad p_1 = 4;\ p_2 = 9 \quad \text{budget} \to b \geq$$

$$\mathcal{L}(q_1 q_2 \lambda) = q_1^3 + q_2^3 - \lambda(4q_1 + 9q_2 - b)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 3q_1^2 - 4\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 3q_2^2 - 9\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(4q_1 + 9q_2 - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{3q_1^2}{4} \\ \lambda = \dfrac{3q_2^2}{9} \\ 4q_1 + 9q_2 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} q_1 \overset{(1)}{=} q_2 \quad q_i \geq 0 \\ \lambda = \frac{1}{3} q_2^2 \\ 4q_1 + 9q_2 - b \overset{(3)}{=} 0 \end{cases}$$

(1) in (3)

$$\begin{cases} \frac{3}{2} q_1 = q_2 \\ \lambda = \frac{1}{3} q_2^2 \\ 4q_1 + \frac{27}{2} q_1 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_2 = \frac{3}{35} b \\ \lambda = {}^{3}/_{35^2}\, b^2 \\ q_1 = \frac{2}{35} b \end{cases}$$

Kritische punten

$$q_1^* = \frac{2}{35} b, \quad q_2^* = \frac{3}{35} b$$

$$\lambda^* = \frac{3}{(35)^2} b^2$$

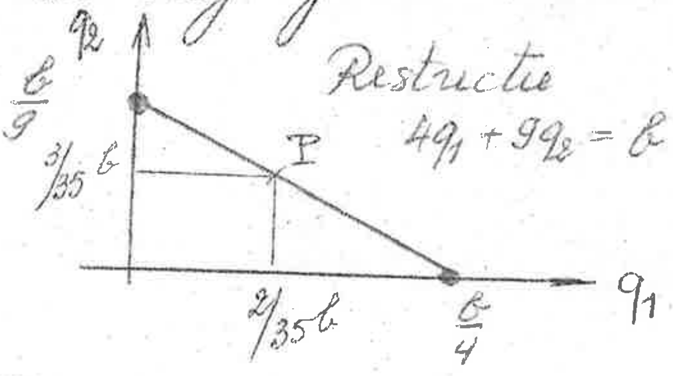
(b) Bespreking stationair punt

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1^2} = 6q_1;\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_2 \partial q_1} = 0;\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_2^2} = 6q_2;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial q_1} = -4;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial q_2} = -9$$

$$H_{\mathcal{L}}(q_1^* q_2^* \lambda^*) = \begin{vmatrix} 6q_1^* & 0 & -4 \\ 0 & 6q_2^* & -9 \\ -4 & -9 & 0 \end{vmatrix} = -96q_2^* - 486q_1^* < 0$$

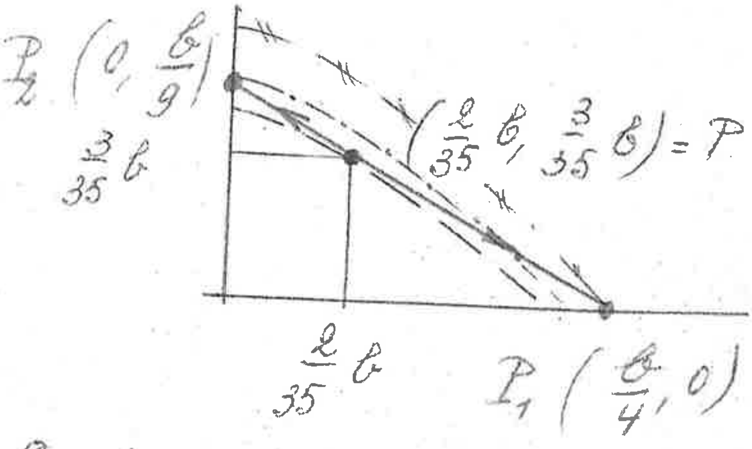
want $q_i > 0$

De stationaire punten zyn dus minima in het inwendig gebied van $\mathbb{R}^2$ waarvoor $q_1 > 0$ en $q_2 > 0$



vraag 6

We onderzoeken de randpunten



Controle P ligt inderdaad op de rechte

$$4q_1 + 9q_2 = b$$

P is een minimum

Op de restrictie (de rechte P_1P_2) verloopt het nut van hoog in P_1 naar omlaag (minimaal in P) naar een maximum (lokaal in P_2)
Er zijn dus 2 lokale randmaxima

$$P_1\left(\frac{b}{4}, 0\right) \text{ met } U\left(\frac{b}{4}, 0\right) = \frac{b^3}{64} \quad (3)$$

$$P_2\left(0, \frac{b}{9}\right) \text{ met } U\left(0, \frac{b}{9}\right) = \frac{b^3}{729} \quad (4)$$

Ter aanvulling: het globaal maximum wordt bereikt in $P_1\left(\frac{b}{4}, 0\right)$

(c) $b = 36$. Vullen we deze waarde in de uitdrukking (3) en (4), dan vind je

$$P_1\left(\frac{36}{4}, 0\right) = P_1(9, 0) \quad \text{met } U_1^* = \frac{36^3}{64} = 729 = 9^3$$

$$P_2\left(\frac{36}{9}, 0\right) = P_2(4, 0) \qquad U_2^* = \frac{b^3}{729} = \frac{36^3}{729} = 64 = 4^3$$

Hieruit blijkt opnieuw dat in P_1, U een globaal maximum bereikt onder de opgegeven restrictie

Ter aanvulling voor $b = 36$ is het lokaal min $P\left(\frac{72}{35}, \frac{108}{35}\right)$ met $U^*\left(\frac{72}{35}, \frac{108}{35}\right) \cong 38$

Opm: aanvullingen niet gevraagd en gequoteerd.

$U(q_1, q_2) = q_1^3 + q_2^3$

(d) $U^*(9,0) = 9^3 = 729$ is het globaal maximum onder de restrictie $4q_1 + 9q_2 = 36$ $b = 36$
Zie hiervoor oplossing (c). Analoog voor $U^*(0,4)$

Voor $b = 35$ vinden we een globaal maximum in $P\left(\frac{35}{4}, 0\right)$ met $U^*\left(\frac{35}{4}, 0\right) = \left(\frac{35}{4}\right)^3 = 669,92$

$\Delta U^* = U^*(35) - U^*(36) = -59,08$ eenheden

(e) De inwendige stationaire punten voldoen aan $q_1^* = \frac{2}{35} b$ en $q_2^* = \frac{3}{35} b$.

Eliminatie van b levert: $b = \frac{35 q_1^*}{2}$.

Na substitutie vind je $q_2^* = \frac{3}{35} \cdot \frac{35 q_1^*}{2} = \frac{3}{2} q_1^*$

i.e een rechte door de oorsprong met rico $\frac{3}{2}$ in eerste kwadrant wegens economische relevantie $q_1 \geq 0$ en $q_2 \geq 0$

vraag 6 vervolg

NAAM+VOORNAAM: STUDNR:

FACULTEIT ECONOMIE EN BEDRIJFSKUNDE

UNIVERSITEIT GENT

Examen: Wiskunde voor bedrijfskundigen II
Academiejaar: 2016/2017

BA & SP Handelswetenschappen
Zittijd: 2

☞ Duur van het examen: 3u.

☞ Het gebruik van een zakrekenmachine is NIET toegelaten. Laat getallen die je zonder rekenmachine niet kan berekenen gewoon staan (zoals bijvoorbeeld e^{-2}, $\log_2 \pi$, $\sqrt{3}$, etc.).

☞ Totaal: op 60 punten.

1. (a) $\boxed{\text{5 ptn}}$ Bewijs dat eenzelfde vierkante matrix geen twee verschillende inverse matrices kan hebben.

(b) $\boxed{\text{2 ptn}}$ **Gegeven**: X en Y zijn $(p \times 1)$-matrices en $B = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$. **Gevraagd**: het formaat van B, in de onderstelling dat deze matrix bestaat.

(c) $\boxed{\text{3 ptn}}$ *Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.* Als AB = nulmatrix, dan is A een nulmatrix of B een nulmatrix.

2. $\boxed{\text{6 ptn}}$ Bereken

$$\int_0^1 \frac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,\mathrm{d}x.$$

3. $\boxed{\text{6 ptn}}$ Los de volgende differentiaalvergelijking expliciet op:

$$y'(t) = -\,y(t)\,\ln y(t)$$

4. $\boxed{\text{8 ptn}}$ De economische groei in twee Chinese districten Xuhui en Yangpu wordt gegeven door x respectievelijk y. De globale welvaart van beide districten samen kan gemodelleerd worden door de uitdrukking

$$W(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

De economische groei stijgt in beide districten langzaam en wordt in functie van de tijd t, uitgedrukt in jaar, respectievelijk gegeven door

$$x = \sqrt{2t} \quad \text{en } y = \sqrt{8t}.$$

(a) $\boxed{\text{2 ptn}}$ Bepaal de globale welvaart W in functie van de tijd t uitgedrukt in jaar.

(b) $\boxed{\text{6 ptn}}$ Als $x = 2$ en $y = 4$ en de economische groei y met twee eenheden stijgt hoe moet dan de economische groei x veranderen opdat de globale welvaart W voor beide districten niet zou veranderen?

5. $\boxed{\text{14 ptn}}$ Op drie plaatsen in Gent: de Sterre (S), Blandijn (B) en Mercator (M) staan studentenfietsen van de UGent. Studenten kunnen er enkel mee fietsen tussen S, B en M. Het wekelijkse fietsenverloop tussen de drie locaties wordt door het volgend stelsel differentievergelijkingen, waarbij x_t, y_t en z_t het aantal fietsen zijn die na t weken respectievelijk op de plaatsen S, B en M staan.

$$\begin{cases} x_{t+1} = & \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}y_t + \frac{1}{2}z_t \\ y_{t+1} = & \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}y_t \\ z_{t+1} = & \frac{1}{2}z_t \end{cases}$$

Er is vastgesteld dat er na één week 60 fietsen aan de Sterre, 60 fietsen aan de Blandijn en 380 fietsen aan Mercator staan (d.w.z. $x_1 = 60$, $y_1 = 60$ en $z_1 = 380$).

(a) $\boxed{\text{9 ptn}}$ Los het stelsel differentievergelijkingen algemeen op.

(b) $\boxed{\text{3 ptn}}$ Bereken het aantal fietsen die na 3 weken aan Mercator staan.

(c) $\boxed{\text{2 ptn}}$ Bereken hoeveel fietsen er op elke plaats zullen staan op de lange duur.

6. $\boxed{\text{16 ptn}}$ Het nut ervaren door een consument bij bezit van een goederenbundel (q_1, q_2) is gegeven door:

$$U(q_1, q_2) = q_1^3 + q_2^3.$$

De eenheidsprijzen van de goederen zijn achtereenvolgens $p_1 = 4$ en $p_2 = 9$. Het budget van de consument is $b \geq 0$.

(a) $\boxed{\text{7 ptn}}$ Pas de methode van Lagrange toe om ALLE stationaire punten $(q_1^*, q_2^*, \lambda^*)$ te vinden als functie van het budget b.

(b) $\boxed{\text{5 ptn}}$ Voor welk stationair punt bereikt het nut een lokaal gebonden maximum? Toon aan.

(c) $\boxed{\text{1 ptn}}$ Bereken de lokaal gebonden maximale waarde U^* van U als het budget b gelijk is aan 36.

(d) $\boxed{\text{1 ptn}}$ We laten nu het budget van 36 naar 35 afnemen. Met hoeveel eenheden verandert U^* uit vraag (c)?

(e) $\boxed{\text{2 ptn}}$ Bepaal de vergelijking van de kromme van stationaire punten uit vraag (b) bij variabel budget b.